

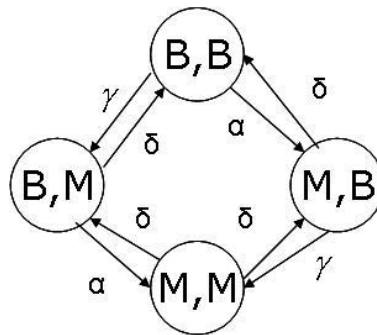


SOLUCIÓN CONTROL 2

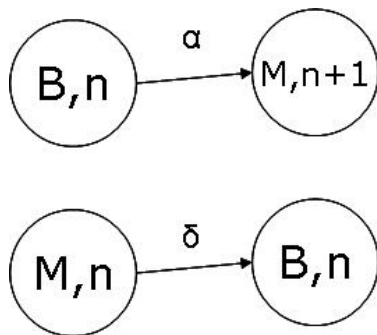
18 de Octubre de 2006

Problema 1

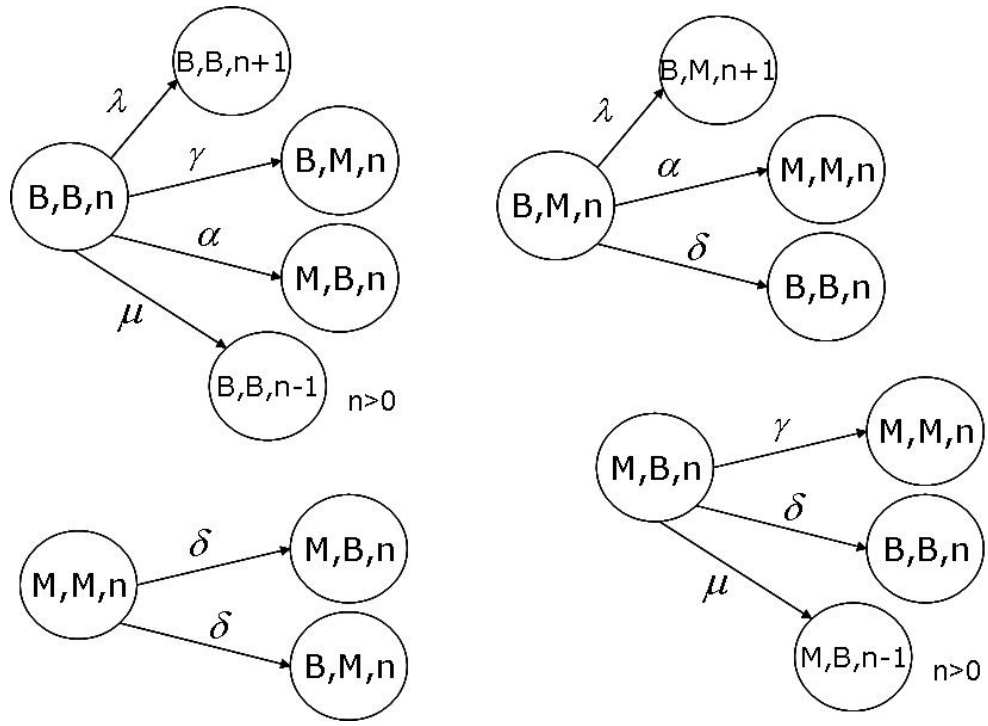
1. Sí es una cadena de Markov en tiempo continuo pues los tiempos de permanencia en cada estado son v.a. exponenciales. El conjunto de estados es $\{(B, B), (M, B), (B, M), (M, M)\}$. Las tasas de transición se especifican en la siguiente figura:



2. No es una cadena de Markov en tiempo continuo, pues la permanencia en un estado para la componente R_t no es una v.a. exponencial, es una gama (que no tiene pérdida de memoria). Se podría agregar una componente que especifique el número de hojas consecutivas que impresas por la impresora fija y, en tal caso, se tendría una CMTC.
3. Sí es una CMTC, pues los tiempos de permanencia en cada estado son v.a. exponenciales. El conjunto de estados es $\{(B, n), (M, n)/n \in \mathbb{N}\}$. Las tasas de transición se especifican en la siguiente figura:



4. a) Los estados y tasas de transición se especifican en los grafos siguientes:



- b) Es claro que lo relevante es analizar el posible atochamiento que se pueda producir en la espera de impresiones en la impresora variable. Se debiera cumplir que en promedio la tasa de despacho de hojas desde la impresora fija a la variable sea menor que la de despacho de trabajos terminados por la impresora variable. Para ello ponderamos las tasas de impresión de cada una y las ponderamos por la fracción de tiempo que en promedio permanecen funcionando correctamente:

$$\lambda \left(\frac{\alpha}{\alpha + \delta} \right) < \mu \left(\frac{\gamma}{\gamma + \delta} \right)$$

NOTA: Para efectos de corrección, se consideró con todo el puntaje expresiones alternativas y “razonables”.

- c) ■

$$E(\text{hojas listas}) = \mu \sum_{n \geq 1} \pi_{B,B,n} + \pi_{M,B,n}$$

■

$$E(\text{hojas en espera}) = \sum_{n \geq 2} (n-1)(\pi_{B,B,n} + \pi_{M,B,n}) + \sum_{n \geq 1} n(\pi_{B,M,n} + \pi_{M,M,n})$$

- d) ■ Sean p_i la probabilidad de obtener exactamente i bonos ($\sum_{i=0}^5 p_i = 1$) y q_k la probabilidad de imprimir correctamente k hojas consecutivas en la impresora de contenido fijo. Se tiene que:

$$q_k = \left(\frac{\lambda}{\lambda + \alpha} \right)^k$$

$$p_i = q_{15000} q_{5000}^{i-1} (1 - q_{5000}) \forall i \in \{1, \dots, 4\}$$

$$p_5 = q_{15000} q_{5000}^4$$

Luego, la respuesta es:

$$E(\text{Nro. Bonos}) = \sum_{i=1}^5 i p_i$$

- Sea HC_t el número de hojas impresas consecutivamente (sin que la máquina falle) hasta el instante t por el operario vigente en t y NB_t el número acumulado de bonos del operario vigente en t . Es claro que $\{(EF, HC, NB)_t : HC < 15000, NB < 5\}$ define una cadena de Markov a tiempo continuo. Esta cadena es finita e irreducible, por lo tanto, tiene probabilidades estacionarias, dadas por los $\pi_{EF, HC, NB}$ que resuelven el siguiente sistema:

$$\pi_{EF,HC,NB} \sum_{i,j,k} \lambda_{(EF,HC,NB),(i,j,k)} = \sum_{i,j,k} \pi_{i,j,k} \lambda_{(i,j,k),(EF,HC,NB)} \quad \forall (EF,HC,NB)$$

$$\sum_{EF,HC,NB} \pi_{EF,HC,NB} = 1$$

La respuesta a la pregunta es entonces:

$$E(\text{Nro. Operarios}) = 1 + \lambda \pi_{B,14999,4} + \sum_{0 \leq j \leq 14999} \alpha \pi_{B,j,0} + \sum_{0 \leq j \leq 4999, 1 \leq k \leq 4} \alpha \pi_{B,n,k}$$

- Basta notar que la v.a. “ser promovido a labores superiores” es una geométrica de parámetro p_5 . Luego, la respuesta es:

$$E(\text{Nro. Operarios hasta promoción}) = \frac{1}{p_5}$$

También se puede plantear una CMTD para responder esta pregunta.

NOTA: Para efectos de corrección, se aceptaron maneras alternativas y “razonables” de abordar esta parte del problema.

Problema 2

1. La posición de Armijo y su prometida se puede modelar con la siguiente cadena:

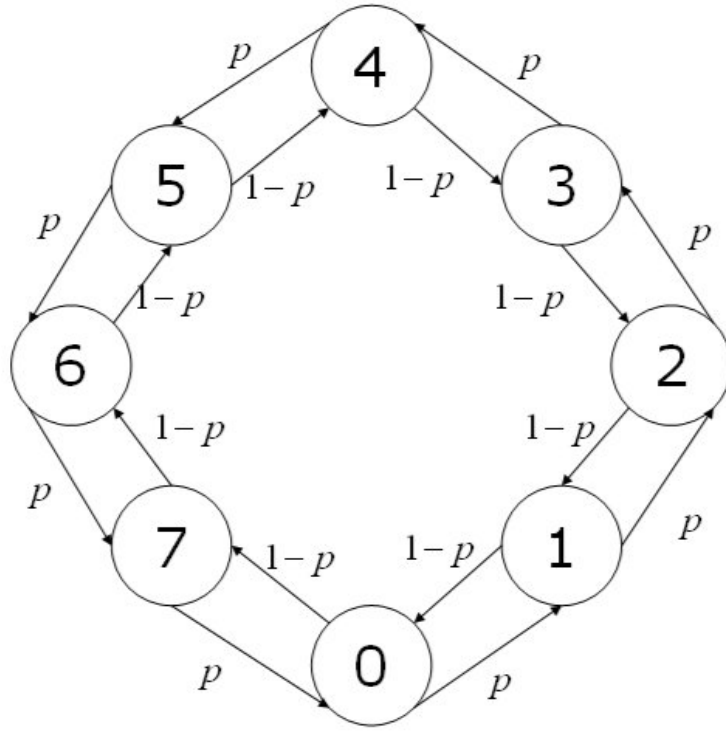


Figura 1: Cadena parte 1.

Notar que se ha definido que el ángulo se mide en sentido antihorario (perfectamente se pudo haber definido en forma inversa).

Es claro ver que todos sus estados están comunicados y componen una única clase recurrente de período 2, razón por la que la cadena anterior no admite probabilidades estacionarias.

2. Definiendo:

$P_{i,n}$ = Probabilidad de alcanzar el estado 4 estando en i quedando n desplazamientos.

La probabilidad pedida corresponde a $P_{0,6}$, condicionando en el primer movimiento:

$$P_{0,6} = P_{1,5} \cdot p + P_{7,5} \cdot (1 - p)$$

$$\begin{aligned} P_{1,5} &= P_{2,4} \cdot p + P_{0,4} \cdot (1 - p) \\ &= P_{2,4} \cdot p + [p^4 + (1 - p)^4] \cdot (1 - p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{7,5} &= P_{0,4} \cdot p + P_{6,4} \cdot (1 - p) \\ &= [p^4 + (1 - p)^4] \cdot p + P_{6,4} \cdot (1 - p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{2,4} &= P_{3,3} \cdot p + P_{1,3} \cdot (1 - p) \\ &= P_{3,3} \cdot p + p^3(1 - p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{6,4} &= P_{7,3} \cdot p + P_{5,3} \cdot (1 - p) \\ &= (1 - p)^3 p + P_{5,3} \cdot (1 - p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{3,3} &= P_{4,2} \cdot p + P_{2,2} \cdot (1 - p) \\ &= 1 \cdot p + p^2(1 - p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{5,3} &= P_{6,2} \cdot p + P_{4,2} \cdot (1 - p) \\ &= (1 - p)^2 p + 1 \cdot (1 - p) \end{aligned}$$

Luego:

$$P_{0,6} = p^4 + (1 - p)^4 + 4(p^5(1 - p) + p(1 - p)^5)$$

3. Para esta parte, se procede de forma análoga al caso anterior, modificando la cadena:

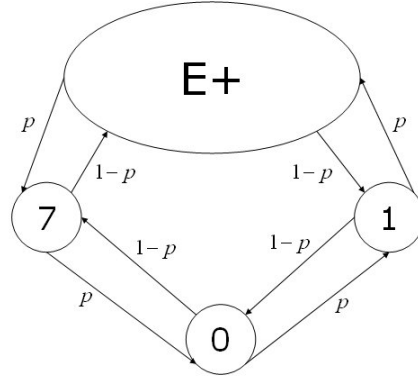


Figura 2: Cadena modificada, parte 3.

Y definiendo:

$Q_{i,n}$ = Probabilidad de alcanzar el estado $E +$ estando en i quedando n desplazamientos.

La probabilidad pedida es $q \cdot Q_{0,6}$, condicionando en el primer desplazamiento:

$$Q_{0,6} = Q_{1,5} \cdot p + Q_{7,5} \cdot (1 - p)$$

$$\begin{aligned} Q_{1,5} &= Q_{E+,4} \cdot p + Q_{0,4} \cdot (1 - p) \\ &= 1 \cdot p + Q_{0,4} \cdot (1 - p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{7,5} &= Q_{0,4} \cdot p + Q_{E+,4} \cdot (1 - p) \\ &= Q_{0,4} \cdot p + 1 \cdot (1 - p) \end{aligned}$$

$$Q_{0,4} = Q_{1,3} \cdot p + Q_{7,3} \cdot (1 - p)$$

$$\begin{aligned} Q_{1,3} &= Q_{E+,2} \cdot p + Q_{0,2} \cdot (1 - p) \\ &= 1 \cdot p + Q_{0,2} \cdot (1 - p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{7,3} &= Q_{0,2} \cdot p + Q_{E+,2} \cdot (1 - p) \\ &= Q_{0,2} \cdot p + 1 \cdot (1 - p) \end{aligned}$$

$$Q_{0,2} = Q_{1,1} \cdot p + Q_{7,1} \cdot (1 - p)$$

$$\begin{aligned} Q_{1,1} &= Q_{E+,0} \cdot p + Q_{0,0} \cdot (1 - p) \\ &= 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{7,1} &= Q_{0,0} \cdot p + Q_{E+,0} \cdot (1 - p) \\ &= 0 \cdot p + 1 \cdot (1 - p) \end{aligned}$$

Luego:

$$P[\text{Soltero}] = q[1 - 8p^3(1 - p)^3]$$

4. La posición de Armijo se puede modelar con la siguiente cadena:

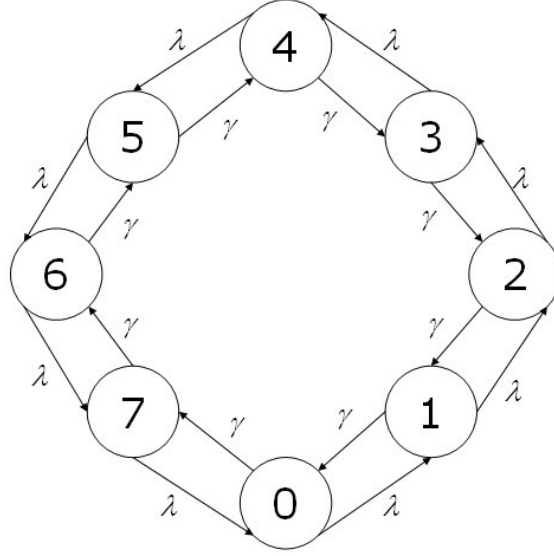


Figura 3: Cadena parte 4.

Notar que se ha definido que el ángulo se mide en sentido antihorario (perfectamente se pudo haber definido en forma inversa).

Es claro ver que todos sus estados están comunicados y componen una única clase recurrente. Como la cadena anterior es finita e irreducible admite probabilidades estacionarias.

Las ecuaciones que permiten calcularlas son:

$$\begin{aligned} (\lambda + \gamma) \cdot \pi_i &= \lambda \cdot \pi_{i-1} + \gamma \cdot \pi_{i+1} & \forall i \in \{1 \dots 6\} \\ (\lambda + \gamma) \cdot \pi_0 &= \lambda \cdot \pi_7 + \gamma \cdot \pi_1 \\ \sum_{i=0}^7 \pi_i &= 1 \end{aligned}$$

5. Asumiendo conocidas las probabilidades estacionarias, y notando que la altura del i -ésimo estado es:

$$h(i) = i \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = 45^\circ \cdot i - 90^\circ$$

La altura a la que espera quedar Armijo cuando se agote el combustible es:

$$H_A = \sum_{i=0}^7 h(i) \cdot \pi_i = 45^\circ \sum_{i=0}^7 i \cdot \pi_i - 90^\circ$$

Dudas y/o errores:

Mario Guajardo
mguajard@ing.uchile.cl

Daniel Yung
dyung@ing.uchile.cl